Datation par le Carbone 14

Rappel : Il vous est demandé de traiter chaque partie sur des copies séparées.

L'atmosphère terrestre contient de l'azote qui est transformé, sous l'effet du rayonnement cosmique, en carbone 14, radioactif noté ^{14}C. Les êtres vivants contiennent donc du ^{14}C qui est renouvelé constamment. A leur mort, il n'y a plus d'emprunt de ^{14}C à l'extérieur et le carbone ^{14}C qu'ils contiennent se désintègre. Le temps écoulé depuis la mort d'un être vivant peut donc être évalué en mesurant la proportion de carbone ^{14}C qui lui reste.
Soit N(t) le nombre d'atomes de ^{14}C existant à l'instant t, exprimé en années, dans un échantillon de matière organique ; on montre que $N'(t) = -0{,}0001238.N(t)$.
La vitesse de désintégration est donc proportionnelle au nombre d'atomes présents.

1ère partie :

1) On appelle N_0 le nombre d'atomes de ^{14}C initial. On prendra $N_0 = 109855$
   Résoudre l'équation différentielle : $N'(t) = -\lambda\, N(t)$ avec $\lambda = 0{,}0001238$.
2) Calculer $\lim_{t \to +\infty} N(t)$
3) Etudier les variations de N(t) sur l'intervalle $[0 ;+\infty[$
4) On pose $A(t) = \lambda\, N(t)$ pour tout réel t de l'intervalle $[0 ;+\infty[$. A(t) désigne l'activité. Construire la courbe représentative (C) de A(t) sur l'intervalle [0 ;10000] après avoir reproduit et complété le tableau suivant :

t	0	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
A(t)	13,6										

unités : 1cm pour 500 ans en abscisse et 1cm pour 1 en ordonnée.

5) a) Démontrer que pour tout réel k appartenant à l'intervalle $]0 ;A_0]$, l'équation A(t) = k admet une unique solution dans l'intervalle $[0 ;+\infty[$.
   b) Déterminer , à la calculatrice, une valeur approchée entière par défaut du temps $t_{1/2}$ au bout duquel l'activité a diminué de moitié.
   c) Démontrer par calcul que $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$
6) a) Déterminer l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.
   b) Déterminer par calcul l'abscisse τ du point d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses.
   c) Vérifier que $\dfrac{t_{1/2}}{\tau} = \ln 2$

2ème partie :

1) Rappeler l'expression littérale de la loi de décroissance radioactive et à l'aide de la 1 ere partie, justifier la valeur de la constante radioactive λ, précisez l'unité.
2) Qu'appelle-t-on temps de demi-vie d'un échantillon radioactif ?
3) Après avoir rappelé la relation entre la demi-vie et la constante radioactive, calculer le temps de demi-vie du carbone ^{14}C.
4) Quel est le pourcentage d'atomes de carbone perdus au bout de 10000 ans ?
5) On analyse des fragments d'os trouvés dans une grotte. On constate qu'ils ont perdu 30% de leur teneur en carbone 14. Déterminer l'âge des fragments d'os.

Devoir maison commun Mathématiques / Sciences physiques

La méthode d'EULER permet de calculer successivement les valeurs N(t) et $\frac{dN(t)}{dt}$ à des intervalles de temps réguliers Δt appelé le pas.

En prenant un pas convenable, on peut écrire la relation : $N(t + \Delta t) = N(t) + (\frac{dN(t)}{dt}).\Delta t$

6) En utilisant la méthode d'Euler, montrer que la relation liant $N(t + \Delta t)$ et N(t) est : $\mathbf{N(t + \Delta t) = N(t) [1 - \lambda\Delta t]}$

7) Quelle est la relation entre le nombre N de noyaux présents à une date t et l'activité A de ces noyaux.
8) A l'aide des deux questions précédentes, en déduire la relation entre $A(t+\Delta t)$ et A(t).
9) Donner l'expression théorique de l'activité A en fonction du temps en utilisant les questions 1) et 7).

Dans le tableau de mesures fourni en annexe est donné l'activité du fragment d'os en fonction de la date. Trois valeurs d'activité apparaissent :

- l'activité calculée à partir de l'expression théorique
- L'activité calculée par la méthode d'Euler avec un pas de 500 ans
- L'activité calculée par la méthode d'Euler avec un pas de 1000 ans.

10) Compléter les cases manquantes en utilisant la relation établie à la question 8).
11) Tracer sur un même graphe les trois courbes A = f(t).
12) Quel est le pas qui semble le mieux adapté à la résolution par la méthode d'Euler ?
13) Retrouvez à l'aide la courbe le temps de demi-vie du carbone ^{14}C.
14) L'activité du fragment d'os retrouvé vaut 9,45. A l'aide de la courbe, donner l'âge de ce fragment d'os.

Date	A(Théorie)	A (Euler 500)	A (Euler 1000)
0	13,60	13,60	13,60
1000	12,02	11,97	11,92
2000	10,62	10,53	10,44
3000	9,38	9,27	9,15
4000	8,29		8,02
5000	7,32	7,18	
6000	6,47	6,32	6,15
7000	5,72	5,56	5,39
8000	5,05	4,89	4,72
9000	4,46	4,31	4,14
10000	3,94	3,79	3,63

Date en années
A (théorie) : activité calculée à partir de l'expression théorique
A (Euler 500) : activité calculée par la méthode d'Euler avec un pas de 500 ans.
A (Euler 1000) : activité calculée par la méthode d'Euler avec un pas de 1000 ans.

Les activités sont données en nombre de désintégrations par gramme et par minute